**Лекция №3.** **Интегральные уравнения Вольтерра 2-го рода.**

Построение решения интегрального уравнения Вольтерры 2-го рода методом последовательных приближений. Резольвента.

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода

где - непрерывная функция при

 а - непрерывна при.

**Теорема 1.** Уравнение (1) имеет единственное непрерывное решение при любом значении . Это решение может быть найдено методом последовательных приближений.

**Доказательство.** Докажем существование решения. Для этого рассмотрим последовательность функций, определяемых рекуррентным соотношением

где





и т.д.

Функции очевидно, непрерывны.

Представим

 Обозначим

Имеем последовательность оценок:

.........................................................................

Члены ряда мажорируются членами числового ряда

Следовательно, по признаку Вейерштрасса ряд сходится равномерно. Но так как - частичные суммы, то где непрерывная на функция.

Для выполнена оценка

В силу равномерной сходимости можно перейти в (2) к пределу при . Получим соотношение (1).

Таким образом, функция - предел равномерно сходящейся последовательности – является решением уравнения (1).

Докажем единственность решения уравнения Вольтерра 2-го рода.

Пусть  и  - два непрерывных решения уравнения (1). Тогда . Откуда следует, что  удовлетворяет уравнению

 . (2)

Обозначим . Оценивая мажорантным способом правую часть уравнения (2), получим

 .

Подставляя, эту оценку опять в правую часть уравнения (2), получим

 .

И так далее. После k-шага имеем оценку

 . (3)

Если  не равно тождественно нулю, то найдется , при котором  отлично от нуля. С другой стороны, для  при достаточно больших k выполнено неравенство

 .

Из оценки (3) получаем, что , где  ­­- произвольная сколь угодна малая величина. Выбрав, , получим противоречие. Следовательно,  и решение уравнения (1) единственно.

Пример 1.

**Итерированные ядра, резольвента для интегрального уравнения Вольтера II рода.**

Проанализируем последовательные приближения. Пусть

 ,

 ,

 

 

Преобразуем

 .

Обозначим

 

и назовём эту функцию вторым итерированным ядром.

Тогда

 

Продолжая построение последовательных приближений, получим

  (4)

где итерированные ядра:

 , , …, , 

Выражение  является частичной суммой ряда

 . (5)

Покажем, что члены этого ряда являются функциями непрерывными и ряд сходится равномерно на множестве .

 Действительно,  по условию,

, как определённый интеграл, зависящий от параметров  и  от непрерывной функции при  и т.д.

Равномерная сходимость доказывается с помощью признака Вейерштрасса

 по условию,

,



и т.д. Получаем, что

 .

Тогда для каждого члена ряда (5) имеет место оценка

 ,

а числовой ряд  сходится. Легко проверяется по признаку Даламбера: , , тогда

. Следовательно, функциональный ряд

 

сходится равномерно на множестве .

Из теоремы о непрерывности суммы равномерно-сходящегося функционального ряда вытекает, что

  (6)

является непрерывной на множестве .

 Теперь, если в выражении (4) перейдем к пределу  , то получим

 . (7)

**Теорема.** Решение уравнения (1) представимо в виде (7),  резольвента, определяемая рядом (6), является непрерывной функцией на множестве  при любом .

Следовательно, решение  выражается в интегральной форме через резольвенту  и известную функцию .

**Замечание.**

 Если рассмотреть операторы

 ; , то уравнение (1) запишется в виде , а решение .